Série d'exercices N°07 ❦ Etude de fonctions ❦

Exercice N° 01:

(A) Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Etudier les variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]2;3[$, donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

(B) f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 2}{x^2 - 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $]1; +\infty[$.
2. Etudier les variation de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que $f(\alpha) = 3\alpha + 1$ puis donner un encadrement de α.
4. **(a)** Montrer que la droite $\mathscr{D} : y = 2x + 1$ est une droite asymptote à $\mathscr{C}_f$.
   (b) Etudier la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_f$.
5. **(a)** Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ où la tangente soit parallèles à $\mathscr{D}$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_f$ et les droites de l'exercice.

Exercice N° 02:

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 1}{x^2 - 1}$.
$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{x+1}$.
2. Déduire l'équation de la droite asymptote à $\mathscr{C}_f$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $\left]0; \dfrac{1}{2}\right[$.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice N° 03:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$.
$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 5.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. **(a)** Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux droites asymptotes Δ_1 et Δ_2 qu'on donnera leurs équations.
   (b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.
5. **(a)** Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
   (b) Tracer $\mathscr{C}_f$.
6. **(a)** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h(x) = \sqrt{x^2 - 4|x| - 5}$.
   (b) Montrer que h est une fonction paire.
   (c) Tracer $\mathscr{C}_h$ dans le même repère.

Exercice N° 04:

(I) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = ax + \dfrac{bx + c}{(x-2)^2}$.
$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. **(a)** Déterminer a, b et c tel que $\mathscr{C}_f$ passe par le point $D(3;1)$ et un extrémum au point $E(1;1)$.
   (b) Déduire alors que $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{(x-2)^2}$.
2. **(a)** Etudier les variations de f et déterminer ses droites asymptotes.
   (b) Déterminer le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 0$ et montrer qu'il existe unique solution $\alpha \in \left]\frac{5}{2}; 3\right[$.
   (c) Donner un encadrement à 10^{-2} près de α .
3. **(a)** Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et son asymptote oblique.

(b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente T parallèle à l'asymptote oblique.

(c) Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion Ω qu'on déterminera.

4. (a) Tracer $\mathscr{C}_f$ et T.

(b) Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre des solution de l'équation $f(x) = x + m$.

(II) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 3 \\ x - 3 + \frac{1}{x-2} & \text{si } x < 3 \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de h en 3, puis interpréter le résultats graphiqument.

2. Etudier les variation de h en utilisant celles de f.

3. Tracer $\mathscr{C}_h$

Exercice N° 05:

(I) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

1. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

(b) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet unique solution α et que $0,7 < \alpha < 0,8$.

(b) Déduire le signe de $g(x)$

(II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$.

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. (a) Montrer que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1) + \dfrac{1-3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$.

(b) Déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une droite Δ asymptote oblique qu'on détermine une équation.

(c) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

3. (a) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{x.g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$.

(b) Dresser le tableau de variation de f. (on prendra $f(\alpha) \approx -0,1$)

4. Calculer $f(1)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

5. Tracer Δ et $\mathscr{C}_f$.

6. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe dans le même repère.

(a) Montrer que pour tout réel x : $h(x) = f(x) - 2$.

(b) Déduire $\mathscr{C}_h$ à partir de $\mathscr{C}_f$ puis la tracer dans le même repère.

Exercice N° 06:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

$\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. (a) Montrer que f est impaire.

(b) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

(c) Dresser le tableau de variation de f.

2. (a) Donner l'équation de T la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

(b) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T puis en déduire que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion qu'on précisera.

(c) Montrer que la droite $\mathscr{D} : y = x + 1$ est une droite asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$ et déduire l'équation de l'autre asymptote $\mathscr{D}'$.

(d) Tracer $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{C}_f$.

3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |x|\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

(a) Montrer que g est paire.

(b) Tracer $\mathscr{C}_g$ à partir $\mathscr{C}_f$.